Εισαγωγή στις διαφορικές εξισώσεις

Παράδειγμα 4 $y' = \underbrace{e^{-y^2} + \sqrt{1-x^2}}_{f(x,y)}$, $y(0) = 1$

$Df = \{ |x| \le 1, y \in \mathbb{R} \}$

$\cdot \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \left| e^{-y^2}(-2y) \right| = e^{-y^2} \cdot 2|y| \le \frac{2|y|}{e^{-y^2}} = \frac{2u}{e^{+u^2}} \le 2u$

ΘΕΩΡΗΜΑ 3 Ας είναι $I \subseteq \mathbb{R}$ (διάστημα) και $E = \{(x,y): x \in I, y \in \mathbb{R}\} \subseteq Df$. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο E ⊛ και ότι η f πληροί μια συνθήκη Lipschitz ⊛ και ότι $\forall J$ συμπαγές υποδιάστημα του I) στο σύνολο $E_J = \{(x,y): x \in J, y \in \mathbb{R}\}$.
Τότε το πρόβλημα αρχικών τιμών (Ε)-(J) έχει ακριβώς μια λύση στο I

Παράδειγμα 5 (Βιβλίου)

$y' = x^2 \operatorname{Arctg} y + e^{-x}$, $y(1) = -2$

$f(x,y) = x^2 \operatorname{Arctg} y + e^{-x}$, $Df = \mathbb{R}^2$.

$\left| \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \right| = \left| x^2 \cdot \frac{1}{1+y^2} \right| = x^2 \cdot \frac{1}{1+y^2} \le x^2 \le \max\{a^2, b^2\}$

Έστω σύνολο J: συμπαγές υποδιάστημα του $\mathbb{R}$, $1 \in J$

$E_J : \{x \in J, y \in \mathbb{R}\}$.

↳ Θεώρημα 3 $\Rightarrow$ υπάρχει λύση (μια) σε όλο το $\mathbb{R}$

ΑΣΚΗΣΗ 5 σελ. 28

$y' = \frac{\cos y}{1-x^2}$, $y(0)=-2$. Ακριβώς 1 λύση στο $(-1,1)$

Το βάζουμε $(-1,1)$ για να έχει μέσα το 0.

$f(x,y) = \frac{\cos y}{1-x^2}$ $\quad D_f = (-1,1)\times\mathbb{R}$

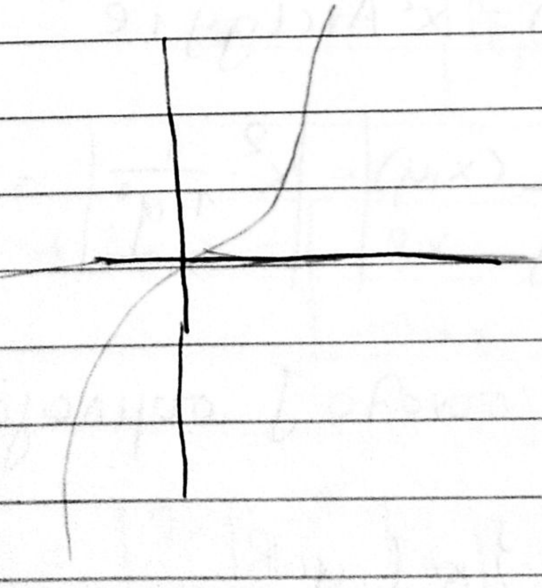
$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| = \frac{|-\sin y|}{1-x^2} \le \frac{1}{1-x^2} \le u$$

J συμπαγές υποδιάστημα $(-1,1)$

δηλ. $J=[a_j, b_j]$ $\quad -1<a_j<b_j<1$

Παράδειγμα f $\quad y' = 3xy^{1/3}$, $y(0)=0$

$$\begin{cases} y_1(x) = 0, & x\in\mathbb{R} \\ y_2(x) = x^3, & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$



Έχει άπειρες λύσεις

Αρχές Δεκεμβρίου θα γίνει πρόοδος θα ανακοινωθεί στο e-course.

No. Date

Η ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ

$(E_n): \alpha_n y^{(n)} + \alpha_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = b \quad , b, \alpha_i \ (i=0,\dots,n) \in C(I)$

$\alpha_n(x) \neq 0, x \in I$

Αν $b=0$ τότε η εξίσωση ονομάζεται ομογενής

Αν $b \neq 0$ '' — '' — '' — μη ομογενής

Για την (E_n)
$$\left.\begin{aligned} y(x_0) &= c_0 \\ y'(x_0) &= c_1 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= c_{n-1} \end{aligned}\right\} \text{Συνθήκες}$$

προαπαιτούμενες γνώσεις: Γραμμικά συστήματα κ.λ.π

κ' Παράγωγος ορίζουσας συναρτήσεων

$$D(A(x))' = \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}' = D_1 + D_2 + \dots + D_n$$

όπου $D_i = \begin{vmatrix} f_{11} & \dots & f_{1i}' & \dots & f_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{ni}' & \dots & f_{nn} \end{vmatrix}$.

Παράδειγμα:

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 & e^x \\ \cos x & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow A'(x) = \begin{bmatrix} 2x & e^x \\ -\sin x & 0 \end{bmatrix}$$

$$D(A(x))' = \begin{vmatrix} x^2 & e^x \\ \cos x & 1 \end{vmatrix}' = \begin{vmatrix} 2x & e^x \\ -\sin x & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & e^x \\ \cos x & 0 \end{vmatrix}.$$

Σελ. 65.

No. Date

ορισμός: Θα λέμε ότι οι συναρτήσεις $f_1, \dots, f_n : D \to \mathbb{R}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες στο $I \subseteq D$ αν υπάρχει $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ με $|c_1| + \dots + |c_n| \neq 0$ και τέτοια ώστε

$$c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0 , x \in I$$

Παράδειγμα 2/σελ. 78.

$$\left.\begin{aligned} f_1(x) &= \sin x \\ f_2(x) &= 3\sin x \\ f_3(x) &= -\sin x \end{aligned}\right\} x \in \mathbb{R}$$ Γραμ. εξαρτ.

$$3 f_1(x) + 1 f_2(x) + 0 f_3(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} g_1(x) &= 1 \\ g_2(x) &= \cos x \\ g_3(x) &= \cos 2x \end{aligned}\right\}$$ Ν.δ. ότι είναι γρ. ανεξ.

Έστω ότι είναι γραμμ. εξαρτ.

$$\exists c_1, c_2, c_3 : c_1 \cdot 1 + c_2 \cos x + c_3 \cos 2x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{Για } x = 0 \rightsquigarrow c_1 + c_2 + c_3 = 0 \\ &\text{Για } x = \pi/2 \rightsquigarrow c_1 + 0 - c_3 = 0 \\ &\text{Για } x = \pi \quad c_1 + c_2 + c_3 = 0 \end{aligned}\right\} c_1 = c_2 = c_3 = 0.$$

Αν είχαμε $I = \{ 0, 2\pi, 4\pi, 6\pi \}$

$$c_1 \cdot 1 - 2 g_2(x) + 1 \cdot g_3(x) = 0.$$